Connexité des valeurs d'adhérence d'une suite

Proposition 1. *Soit (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est connexe.*

Démonstration.

On note Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $A_p = \{u_n \,|\, n \geqslant p\}$. On sait que l'ensemble Γ est égal à l'intersection des $\overline{A_p}$. C'est donc un fermé, et comme E est compact, Γ est compact.

Supposons Γ non connexe, de sorte que l'on peut écrire $\Gamma = A \cup B$ où A et B sont deux fermés non vides disjoints de Γ. Comme Γ est compact, A et B sont même compacts et donc $\alpha = d(A, B) > 0$ puisque A et B sont disjoints. On note alors :

$$A' = \left\{x \in E \,\middle|\, d(x, A) < \frac{\alpha}{3}\right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{x \in E \,\middle|\, d(x, B) < \frac{\alpha}{3}\right\}$$

Les ensembles A' et B' sont ouverts, donc $K = E\backslash(A' \cup B')$ est fermé dans le compact E, donc compact. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans K, ce qui sera une absurdité car $\Gamma \cap K = \varnothing$.

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_0$, on a $d(u_n, u_{n+1}) < \frac{\alpha}{3}$. Soient $N \geqslant N_0$, $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$. Le point x_0 est dans A, donc dans Γ, ainsi x_0 est point d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe alors $n_1 \geqslant N$ tel que $d(x_0, u_{n_1}) < \frac{\alpha}{3}$, donc $u_{n_1} \in A'$. De même, le point y_0 est dans B, donc dans Γ, ainsi y_0 est point d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe alors $n_2 > n_1$ tel que $d(y_0, u_{n_2}) < \frac{\alpha}{3}$, donc $u_{n_2} \in B'$.

Notons maintenant n_0 le premier entier supérieur à n_1 tel que $u_{n_0} \notin A'$. En effet, un tel entier existe car $u_{n_2} \notin A'$. On a alors $u_{n_0-1} \in A'$, donc :

$$d(u_{n_0}, B) \geqslant d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \geqslant d(A, B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) > \frac{\alpha}{3}$$

Cela prouve que $u_{n_0} \notin B'$. Comme de plus $u_{n_0} \notin A'$, on a $u_{n_0} \in K$.

Résumons. Nous venons de montrer que pour tout $N \geqslant N_0$ il existe $n_0 \geqslant N$ tel que $u_{n_0} \in K$. On peut donc construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui prend ses valeurs dans K. Comme K est compact, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans K, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans K. Ceci est impossible, car $\Gamma \cap K = \varnothing$. L'ensemble Γ est donc connexe. $\square$

Application 2. *Soient $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.*

Démonstration.

Bien évidemment, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = \ell - \ell = 0$$

Réciproquement, supposons que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. On note Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque $[0, 1]$ est compact, la proposition précédente donne que Γ est connexe, donc un intervalle

fermé de $[0,1]$.
Montrons qu'alors tout élément $\ell \in \Gamma$ est point fixe de f. Puisque ℓ est valeur d'adhérence de la suite, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ. Par continuité de f, et puisque $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, on a :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} (x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)+1}) + x_{\varphi(n)+1} = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\ell)$$

Ainsi, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins deux valeurs d'adhérence $\ell < \ell'$, alors $[\ell,\ell'] \subset \Gamma$. En particulier, $\frac{\ell+\ell'}{2}$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [\ell,\ell']$. Mais alors on a $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui contredit l'hypothèse sur le nombre de valeurs d'adhérence.
Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une valeur d'adhérence, donc converge. □

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse*. Ellipses, 2008
[FGN13d] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 1*. Cassini, 2013